

Г. А. Шаров

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ



# Оглавление

Предисловие .....	3
Раздел I. Введение в теорию сигналов .....	6
1. Основные понятия и представления теории сигналов .....	6
1.1. Понятие сигнала .....	6
1.2. Классификация сигналов .....	8
1.3. Множества и пространства сигналов. Координатный базис пространства .....	13
1.4. Метрика, норма и скалярное произведение сигналов ..	17
1.5. Энергия и мощность сигналов .....	21
1.6. Функциональные пространства сигналов $L_2$ и $L_1$ .....	21
1.7. Некоторые «особенные» функции, используемые в теории сигналов .....	26
1.8. Понятие обобщённой функции .....	31
1.9. Комплексные сигналы .....	33
1.10. Чётная и нечётная части сигнала. Постоянная и переменная составляющие .....	34
1.11. Решётчатые функции и разностные уравнения .....	36
2. О системах преобразования сигналов .....	40
2.1. Классификация систем .....	41
2.2. Основные системные операции .....	43
2.3. Инвариантность систем к сдвигу. Линейные системы, инвариантные к сдвигу .....	43
2.4. Математическая модель системы .....	45
2.5. Импульсная характеристика линейной системы .....	46
2.6. Переходная характеристика системы. Условие физической реализуемости .....	48
2.7. Свёртка функций .....	48
Раздел II. Спектральный и корреляционный анализ сигналов .....	54
3. Обобщённый спектральный анализ сигналов .....	54
3.1. Ортогональные сигналы и обобщённый ряд Фурье .....	54
3.2. О выборе базисных систем ортогональных функций ..	57
3.3. О спектральном анализе сигналов на основе базисной системы тригонометрических и комплексных экспоненциальных функций .....	59

3.4. Спектральный анализ сигналов на основе многочленов Лежандра .....	60
3.5. Спектральный анализ сигналов на основе многочленов Чебышева .....	62
3.6. Спектральный анализ сигналов на основе многочленов Лагерра .....	63
3.7. Спектральный анализ на основе многочленов Эрмита	64
3.8. О базисных системах для разрывных сигналов .....	65
<b>4. Интегральные представления сигналов .....</b>	<b>70</b>
4.1. Интегрирование по Риману и Стилтесу .....	70
4.2. Интегральные представления и преобразования сигналов. Базисные и сопряжённые базисные ядра .....	71
4.3. Теорема Планшереля. Равенство и теорема Парсеваля	73
<b>5. Гармонический анализ сигналов. Преобразования Фурье .....</b>	<b>77</b>
5.1. Представление временных функций в виде ряда и интеграла Фурье .....	77
5.2. Прямое и обратное преобразования Фурье. Спектральная функция .....	87
5.3. Некоторые замечания относительно преобразования Фурье .....	89
5.4. Основные свойства преобразования Фурье .....	91
5.5. Об особенностях разложения периодических функций в ряды Фурье .....	93
5.6. Эффект Гиббса .....	95
5.7. Формула суммирования Пуассона .....	98
5.8. Преобразование Фурье от произведения сигналов .....	101
5.9. Преобразование Фурье свёртки функций .....	102
5.10. Примеры преобразования Фурье одномерных функций	104
5.11. Синусное и косинусное преобразования Фурье .....	105
<b>6. Гармонический анализ сигналов. Спектры сигналов</b>	<b>110</b>
6.1. Ширина спектра и база сигнала .....	110
6.2. Спектры наиболее употребительных сигналов .....	110
6.3. Частотные спектры сигналов, представляемых обобщённым рядом Фурье .....	122
6.4. Теоремы о спектрах .....	125
6.5. Текущий и мгновенный спектры .....	128
6.6. Умножение сигнала на гармоническую функцию .....	130
6.7. Искажение спектра при конечном преобразовании Фурье .....	131

6.8. О спектрах в обобщённой спектральной теории сигналов .....	133
6.9. О спектрах узкополосных сигналов .....	141
<b>7. Корреляционный анализ сигналов .....</b>	<b>146</b>
7.1. Автокорреляционная функция и её свойства .....	148
7.2. Автокорреляционная функция и энергетический спектр сигнала .....	154
7.3. Интервал корреляции и эффективная ширина спектра сигнала .....	156
7.4. Взаимная корреляционная функция и её свойства ....	158
7.5. Связь между ВКФ и спектрами сигналов .....	162
7.6. Корреляция и свёртка .....	163
7.7. Случайные величины и их характеристики .....	164
7.8. Некоторые одномерные законы распределения. Нормальный закон .....	168
7.9. Случайные процессы и функции .....	172
7.10. Характеристики распределения мгновенных значений случайной функции. Моментные функции .....	173
7.11. Многомерный закон распределения .....	176
7.12. Двумерный закон распределения. Корреляционные функции случайных процессов .....	179
7.13. Двумерное нормальное распределение .....	181
7.14. Множественная корреляция. Ковариационная и корреляционная матрицы .....	182
7.15. О дисперсии суммы случайных величин .....	183
7.16. Спектральный анализ случайных сигналов .....	184
7.17. Теорема Винера-Хинчина .....	187
7.18. Об одностороннем спектре мощности .....	188
<b>Раздел III. Дискретные сигналы .....</b>	<b>190</b>
<b>8. Дискретизация непрерывных сигналов .....</b>	<b>191</b>
8.1. Сущность дискретизации аналогового сигнала .....	191
8.2. Математическое моделирование и практическая реализация дискретного сигнала .....	193
8.3. Явление наложения частот. Критерий Найквиста ....	196
8.4. Эффект тренда. Исключение тренда при дискретизации .....	200
8.5. О доопределении функций, описывающих финитные сигналы .....	204
<b>9. Дискретное преобразование Фурье .....</b>	<b>206</b>
9.1. Определение дискретного преобразования Фурье ....	206
9.2. Дискретные экспоненциальные функции .....	210

9.3. Матричная форма представления ДПФ .....	213
9.4. Свойства дискретного преобразования Фурье .....	213
9.5. Квантование сигналов по уровню .....	215
<b>10. Алгоритм быстрого преобразования Фурье .....</b>	<b>220</b>
10.1. Идея алгоритма БПФ .....	220
10.2. Быстрое преобразование Фурье с децимацией по времени .....	223
10.3. Быстрое преобразование Фурье с децимацией по частоте .....	225
10.4. Представление ВПФ в виде графа .....	227
10.5. Факторизационный подход к построению алгоритмов ВПФ .....	231
10.6. Об ускорении вычислений при использовании алгоритмов ВПФ .....	235
10.7. Вычисление обратного ДПФ с помощью алгоритма прямого ДПФ .....	236
10.8. Об одновременном вычислении преобразования Фурье двух действительных реализаций .....	237
<b>11. Восстановление непрерывных сигналов по дискретным значениям .....</b>	<b>239</b>
11.1. Интерполяционные полиномы .....	239
11.2. Степенные полиномы, полиномы Лежандра .....	242
11.3. Теорема Котельникова. Разложение непрерывных сигналов в ряд Котельникова .....	244
11.4. Восстановление непрерывных сигналов с помощью сплайнов .....	251
<b>Раздел IV. Сигнальные процессы .....</b>	<b>258</b>
<b>12. Модулирование и детектирование сигналов .....</b>	<b>260</b>
12.1. Виды модуляции .....	260
12.2. Амплитудная модуляция .....	262
12.3. Амплитудная модуляция периодической последовательности импульсов .....	268
12.4. Балансная и однополосная АМ модуляция .....	270
12.5. О демодуляции АМ сигналов .....	273
12.6. Угловая модуляция сигналов .....	275
12.7. Частотная модуляция .....	
12.8. Фазовая модуляция .....	281
12.9. Многотональная угловая модуляция .....	287
12.10. О демодуляции УМ сигналов .....	288
12.11. Квадратурная модуляция .....	290

<b>13. Спектры некоторых распространённых ФМ и ЧМ сигналов</b> .....	292
13.1. Исходные формулы для расчёта спектра ФМ сигналов	292
13.2. «Прямоугольное» изменение фазы (фазоманипулированные сигналы).....	294
13.3. Случай модуляции фазы по закону $0/\pi$ .....	296
13.4. Случай модуляции фазы по закону $0/\pi/2$ .....	297
13.5. Линейное изменение фазы по закону «неидеальной пи-лы» с линейным задним фронтом.....	297
13.6. Линейное изменение фазы для «неидеальной пи-лы» при обратном включении модулятора.....	303
13.7. Линейное изменение фазы по закону «идеальной пи-лы»	304
13.8. «Треугольное» изменение фазы.....	306
13.9. Расчёт спектров сигналов, модулированных по фазе по закону пи-лы.....	308
13.10. ЧМ сигнал с модуляцией меандром.....	312
13.11. ЧМ сигнал с пилообразным несимметричным законом модуляции.....	314
13.12. ЧМ сигнал с модуляцией по закону симметричной пи-лы.....	316
13.13. Импульсные сигналы с частотной модуляцией.....	317
<b>14. Преобразование частоты сигналов</b> .....	325
14.1. Общие сведения о преобразовании частоты.....	325
14.2. Анализ процесса преобразования.....	328
14.3. Параметры преобразования диодных преобразователей	331
14.4. Параметры смесителей сигналов.....	334
14.5. Схемы балансных смесителей.....	340
<b>Раздел V. Весовые окна</b> .....	345
<b>15. Метод весовых функций</b> .....	346
15.1. Спектральные утечки.....	348
15.2. Методы оценки спектральных плотностей.....	350
15.3. Спектральная плотность дискретных сигналов. Сглаживающая косинусоидальная функция.....	354
15.4. Некоторые семейства временных окон.....	357
15.5. Основные характеристики временных и спектральных окон.....	367
15.6. Стратегия выбора весовых функций (весовых окон) ..	373
15.7. Некоторые методы вычисления спектров сигналов, содержащих перепады уровней.....	376
<b>Раздел VI. Преобразования сигналов</b> .....	379
<b>16. Преобразование Лапласа</b> .....	379

16.1. Определение преобразования Лапласа .....	379
16.2. Преобразования Лапласа от некоторых функций .....	382
16.3. Основные теоремы преобразования Лапласа .....	384
16.4. Обратное преобразование Лапласа .....	388
16.5. Метод преобразования Лапласа .....	393
16.6. Передаточные функции и временные характеристики .....	395
16.7. Дискретное преобразование Лапласа .....	397
16.8. Резюме .....	400
<b>17. Преобразование Хартли .....</b>	<b>402</b>
17.1. Формулировка преобразований Хартли и их связь с преобразованиями Фурье .....	403
17.2. Преобразование Хартли прямоугольного и дельта-импульса .....	406
17.3. Энергетический и фазовый спектры .....	407
17.4. Основные свойства (теоремы) преобразований Хартли, их сопоставление со свойствами преобразований Фурье .....	409
17.5. Дискретное преобразование Хартли .....	413
17.6. Теоремы для операций при дискретном преобразовании .....	415
17.7. Быстрый алгоритм ДПХ .....	420
17.8. Ещё о связи ДПХ и ДПФ .....	424
17.9. Заключение .....	427
<b>18. Дискретное преобразование Лорана .....</b>	<b>429</b>
18.1. Прямое $Z$ -преобразование .....	429
18.2. Основные теоремы и свойства прямого $Z$ -преобразования .....	433
18.3. Обратное $Z$ -преобразование .....	437
18.4. Связь $Z$ -преобразования с преобразованием Фурье .....	439
18.5. $Z$ -преобразование и комплексная $Z$ -плоскость .....	441
18.6. Алгоритмы расчёта $Z$ -преобразования конечной последовательности .....	446
<b>19. Преобразования Гильберта и Крамерса–Кронига ...</b>	<b>452</b>
19.1. Аналитический сигнал и преобразование Гильберта ..	453
19.2. Прямое и обратное преобразование Гильберта .....	457
19.3. Ещё об аналитическом сигнале .....	459
19.4. Свойства преобразования Гильберта .....	460
19.5. Гильбертовы сигналы .....	462
19.6. Преобразования Гильберта по различным базисным системам .....	464
19.7. О спектрах функций, связанных преобразованием Гильберта .....	466
19.8. Некоторые применения преобразования Гильберта ....	487

19.9. Дискретное преобразование Гильберта .....	470
19.10. Преобразование Крамерса-Кронига .....	473
<b>20. Кратковременные преобразования Фурье. Преобразование Габора .....</b>	<b>476</b>
20.1. Частотно-временная локализация сигналов и ограничения, связанные с применением классического преобразования Фурье .....	476
20.2. Кратковременное преобразование Фурье .....	478
20.3. Инверсное КВПФ .....	482
20.4. КВПФ и КВПФ-спектрограммы .....	483
20.5. Преобразование Габора .....	486
20.6. Дискретное кратковременное преобразование Фурье ..	490
20.7. Дискретное представление и преобразование Габора. Дуальные функции .....	491
<b>21. Вейвлет-преобразования .....</b>	<b>496</b>
21.1. Понятие вейвлета, его основные признаки и свойства. Материнские вейвелты .....	498
21.2. Примеры вейвлетообразующих функций .....	502
21.3. Частотно-временная локализация вейвлет-анализа ....	505
21.4. Прямое и обратное вейвлет-преобразования .....	507
21.5. Сравнение вейвлет-преобразования и оконного преобразования Фурье (аналогии и отличия).....	510
21.6. Свойства вейвлет-преобразований .....	513
21.7. Дискретное вейвлет-преобразование .....	514
21.8. Вейвлетный кратномасштабный анализ. Быстрое вейвлет-преобразование .....	517
21.9. Частотный подход к вейвлет-преобразованию .....	523
21.10. Достоинства и недостатки вейвлетных преобразований	525
<b>Приложения .....</b>	<b>526</b>
1. Код Грея .....	526
2. Вывод формулы для комплексной свёртки изображений .....	526
3. Основные понятия и представления теории вычетов ..	528
<b>Основные обозначения .....</b>	<b>536</b>
<b>Используемые сокращения .....</b>	<b>539</b>
<b>Литература .....</b>	<b>541</b>